



**POLITECHNIKA ŁÓDZKA**  
**WYDZIAŁ MECHANICZNY**  
**Katedra Dynamiki Maszyn**



Marek Balcerzak  
192351

**PRACA MAGISTERSKA**  
na kierunku Mechanika i Budowa Maszyn  
Studia stacjonarne

**TEMAT**

Zastosowanie metod dynamiki nieliniowej w optymalizacji parametrów układu sterowania

kierujący pracą:  
dr inż. Artur Dąbrowski

Autor pracy otrzymywał stypendium w ramach projektu *Synchronization of Mechanical Systems Coupled through Elastic Structure*, który jest częścią programu *TEAM Fundacji na rzecz Nauki Polskiej*. Jest on wspierany przez program *Innowacyjna Gospodarka: Narodowa Strategia Spójności* i finansowany przez *Fundację na rzecz Nauki Polskiej z Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego*.



ŁÓDŹ 30.01.2015

## Spis treści

|   |    |
|---|----|
| Wstęp.....  | 3  |
| Cel i zawartość pracy.....  | 3  |
| Automatyka i układy sterowania – podstawowe pojęcia.....                  | 3  |
| Sprzężenie zwrotne .....  | 5  |
| Regulatory .....  | 6  |
| Dynamika .....  | 9  |
| Układy dynamiczne w kontekście automatyki .....                           | 9  |
| Wykładniki Lapunowa .....   | 13 |
| Stan wiedzy.....  | 17 |
| Metody oceny jakości regulacji .....                                      | 17 |
| Metody estymacji wykładników Lapunowa .....                               | 19 |
| Metoda bezpośrednia .....   | 20 |
| Metoda oparta o obserwację ewolucji wektora zaburzenia.....               | 21 |
| Metodyka badań.....   | 23 |
| Modelowanie wahadła odwróconego .....                                     | 23 |
| Dynamika pręta wahadła .....  | 24 |
| Model silnika.....  | 25 |
| Regulator .....   | 27 |
| Uproszczona metoda estymacji największego wykładnika Lapunowa.....        | 30 |
| Całkowanie numeryczne układów równań różniczkowych .....                  | 32 |
| Wyniki badań.....   | 34 |
| Program do symulacji układu regulacji.....                                | 34 |
| Eksperyment.....  | 34 |
| Parametry układu, parametry procedury całkującej, warunki początkowe..... | 35 |
| Wyniki.....   | 36 |
| Wnioski .....   | 43 |
| Bibliografia .....  | 45 |

## **Wstęp**

### **Cel i zawartość pracy**

Celem poniższej pracy jest sprawdzenie możliwości zastosowania nowej metody estymacji największego wykładnika Lapunowa (LLE) do oceny jakości regulacji w układach regulacji automatycznej. Praca zawiera krótkie wprowadzenie do automatyki: opisana została struktura typowego układu regulacji z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego oraz podstawowe typy regulatorów. Podano także podstawowe pojęcia dotyczące układów dynamicznych, w tym definicję wykładników Lapunowa. Przedstawiono stan wiedzy na temat stosowanych sposobów badania jakości regulacji oraz opisano istniejące algorytmy stosowane do obliczania LLE. W pracy przyjęto, że analiza dotyczyć będzie układu wahadła odwróconego, a więc dla takiego układu zostały wyprowadzone równania ruchu, a następnie równania stanu. Opisano symulację, jaka została przeprowadzona w celu porównania kryterium jakości regulacji opartego na LLE z typowymi kryteriami oceny jakości regulacji. Przedstawiono i skomentowano otrzymane wyniki, a na koniec opisano wynikające z nich wnioski.

### **Automatyka i układy sterowania – podstawowe pojęcia<sup>1</sup>**

Automatyka jest działem nauki i techniki zajmującym się sterowaniem procesami bez udziału człowieka. Przez sterowanie należy rozumieć celowe oddziaływanie na procesy różnego rodzaju (m. in. fizyczne, techniczne, ekonomiczne, biologiczne).

Podstawowymi pojęciami automatyki są: obiekt sterowania oraz urządzenie sterujące. Pojęcie obiektu sterowania może obejmować

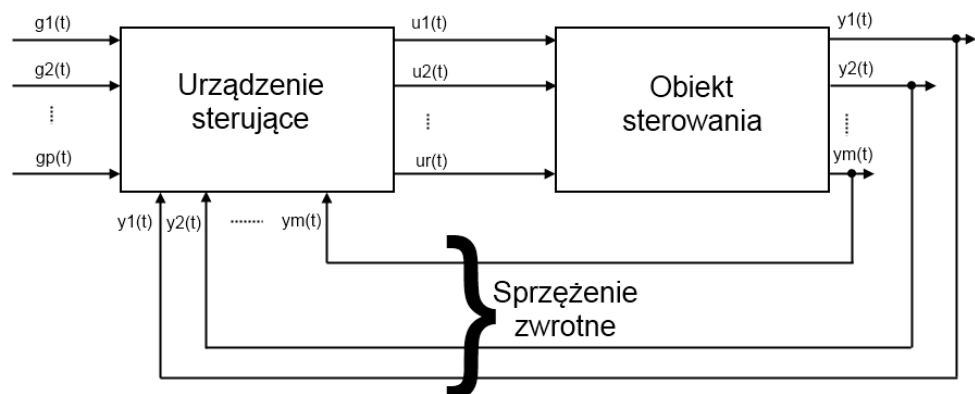
---

<sup>1</sup> [1] s. 21-36

zarówno zbiory elementów podlegające sterowaniu, jak i procesy zachodzące w tych zbiorach. Typowymi przykładami obiektów sterowania są urządzenia techniczne, w których przebiegają podlegające sterowaniu procesy. Urządzenie sterujące oznacza zespół środków realizujących sterowanie odpowiednie do obiektu sterowania. Urządzenie sterujące wymusza pożądany przebieg procesu odbywającego się w obiekcie sterowania.

Zespół złożony z obiektu sterowania i urządzenia sterującego nazywa się układem sterowania. Sygnałem nazywa się wielkość występującą w układzie sterowania, będącą funkcją czasu, która opisuje właściwości i zachowanie układu. Szczególnym przypadkiem sygnału jest sygnał wejściowy – jest to sygnał doprowadzony celowo do układu, który narzuca wymagany przebieg sterowanego procesu. Kolejnym istotnym sygnałem jest sygnał wyjściowy - sygnał który może być odczytany z obiektu sterowania. Następnym ważnym typem sygnału jest sygnał sterujący – za pomocą sygnału sterującego urządzenie sterujące wpływa na obiekt sterowania.

Na rys. 1 przedstawiono schemat układu sterowania. Sygnały  $g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t)$  to sygnały wejściowe,  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  to sygnały sterujące, zaś  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  to sygnały wyjściowe.



Rys. 1 – Ogólny schemat układu sterowania

## Sprzężenie zwrotne

Układy sterowania można zasadniczo podzielić na dwie grupy: układy otwarte i układy zamknięte. W przypadku, gdy sygnały sterujące  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  zależą od sygnałów wyjściowych obiektu  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ , mówi się o zamkniętym układzie sterowania, nazywanym także układem automatycznej regulacji. W takim układzie urządzenie sterujące nazywa się regulatorem. Układ z Rys. 1 jest przykładem układu zamkniętego, ponieważ sygnały wyjściowe obiektu sterowania  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  są doprowadzone do urządzenia sterującego, przez co mają możliwość wpływania na sygnały sterujące. Połączenie przekazujące sygnały wyjściowe obiektu sterowania do urządzenia sterującego nazywamy sprzężeniem zwrotnym.

W przypadku, gdy sygnały sterujące  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  nie zależą od sygnałów wyjściowych obiektu  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ , mówi się o otwartym układzie sterowania. Rys. 1 przedstawiałby otwarty układ sterowania, gdyby przecięte zostały połączenia oznaczone jako sprzężenie zwrotne.

W zamkniętym układzie sterowania (układzie regulacji) sygnały wejściowe  $g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t)$  to sygnały zadające, które reprezentują pożądane zachowanie obiektu sterowania. W sytuacji gdy sygnał zadający reprezentuje pożądany przebieg sygnału wyjściowego, różnicę pomiędzy sygnałem zadającym a odpowiednim sygnałem wyjściowym nazywa się uchybem regulacji i oznacza się:

$$e_i(t) = g_i(t) - y_i(t), 1 \leq i \leq m$$

W przypadku gdy do układu doprowadzony jest tylko jeden sygnał zadający oraz odczytywany jest tylko jeden sygnał wyjściowy można

pominąć indeksy, ponieważ w takim układzie istnieje tylko jeden uchyb regulacji:

$$e(t) = g(t) - y(t)$$

## Regulatory<sup>2</sup>

Regulator to urządzenie sterujące w zamkniętym układzie sterowania, jego zadaniem jest minimalizacja uchybu regulacji w układzie.

W tym podrozdziale przedstawione są typowe przykłady regulatorów o działaniu ciągłym (takie, których wejścia i wyjścia są ciągłymi funkcjami czasu). Choć obecnie szeroko stosowane są regulatory o działaniu dyskretnym (takie, których wejścia lub wyjścia są dyskretnymi funkcjami czasu), to przy odpowiednio krótkim okresie próbkowania i odpowiednio dużej rozdzielczości sygnałów można je aproksymować funkcjami ciągłymi.

Do podstawowych typów regulatorów liniowych o działaniu ciągłym należą:

### a) Regulator proporcjonalny (P)

W regulatorze proporcjonalnym sygnał wyjściowy regulatora (sygnał sterujący) jest wprost proporcjonalny do sygnału wejściowego regulatora (uchybu regulacji):

$$u(t) = k_p * e(t)$$

Stałą  $k_p$  nazywa się współczynnikiem wzmocnienia.

---

<sup>2</sup> [2] s. 100-106

Regulator proporcjonalny stosowany jest w układach regulacji statycznej (a więc w ogólnym przypadku nie jest on w stanie sprowadzić składowej stałej uchybu regulacji do zera). Stosuje się go w prostych układach regulacji. Może stanowić regulator pomocniczy.

b) Regulator proporcjonalno – całkujący (PI)

W regulatorze proporcjonalno-całkującym sygnał wyjściowy regulatora (sygnał sterujący) jest proporcjonalny do sumy dwóch składowych – uchybu regulacji oraz całki z uchybu regulacji po czasie pomnożonej przez odpowiedni współczynnik:

$$u(t) = k_p * \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right] + u(0)$$

Współczynnik  $T_I$  nazywa się czasem zdwojenia.

Regulator proporcjonalno – całkujący stosowany jest w układach regulacji astatycznej, a więc regulator ten jest w stanie sprowadzić składową ustaloną uchybu regulacji do zera. Zapewnia dobrą jakość regulacji przy powolnych zakłóceniach, o niewielkich częstotliwościach.

c) Regulator proporcjonalno-różniczkujący (PD)

W regulatorze proporcjonalno-różniczkującym sygnał wyjściowy regulatora (sygnał sterujący) jest proporcjonalny do sumy dwóch składowych – uchybu regulacji oraz pochodnej z uchybu regulacji po czasie pomnożonej przez odpowiedni współczynnik:

$$u(t) = k_p * \left[ e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Współczynnik  $T_D$  nazywa się czasem wyprzedzania.

Regulator proporcjonalno-różniczkujący stosowany jest w układach regulacji statycznej (a więc w ogólnym przypadku nie jest on w stanie sprowadzić składowej stałej uchybu regulacji do zera). Regulator ten działa poprawnie w szerszym zakresie częstotliwości zakłóceń niż regulator PI, człon różniczkujący zapewnia szybką reakcję na nagłą zmianę zakłócenia.

d) Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID)

W regulatorze proporcjonalno-całkująco-różniczkującym sygnał wyjściowy regulatora (sygnał sterujący) jest proporcjonalny do sumy trzech składowych – uchybu regulacji, całki z uchybu regulacji po czasie pomnożonej przez odpowiedni współczynnik oraz pochodnej z uchybu regulacji po czasie pomnożonej przez odpowiedni współczynnik:

$$u(t) = k_p * \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] + u(0)$$

Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący stosowany jest w układach regulacji astatycznej, a więc regulator ten jest w stanie sprowadzić składową ustaloną uchybu regulacji do zera. Łączy on zalety regulatorów PI oraz PD. Stosuje się go do obiektów poddanych zakłóceniom o dużych i gwałtownych zmianach.



## Dynamika

Dynamika jest dziedziną nauki, która opisuje układy zmienne w czasie. Jeśli rozpatrywany układ zatrzymuje się w położeniu równowagi, powtarza swoje zachowanie cyklicznie, lub wykonuje bardziej skomplikowane działania w czasie, do jego analizy konieczna jest dynamika. Zachowania dynamiczne można spotkać w różnych dziedzinach nauki: mechanice klasycznej, fizyce, biologii, biomatematyce, kinetyce chemicznej i wielu innych. Z perspektywy dynamiki wszystkie te zjawiska mogą być ujęte we wspólnych ramach, za pomocą układów dynamicznych.<sup>3</sup>

Dynamika jest ściśle powiązana z automatyką, ponieważ praktycznie każdy układ automatycznej regulacji może zostać opisany jako układ dynamiczny (autonomiczny lub nieautonomiczny).

### Układy dynamiczne<sup>4</sup> w kontekście automatyki

Autonomiczny układ dynamiczny czasu ciągłego n-tego rzędu jest definiowany za pomocą równania stanu:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

gdzie  $\dot{x}$  oznacza pochodną wektora stanu po czasie,  $x(t) \in R^n$  jest *wektorem stanu* układu, zaś funkcja  $f: R^n \rightarrow R^n$  nazywana jest *polem wektorowym*. Ponieważ pole wektorowe  $f$  układu autonomicznego nie jest zależne od czasu, jako czas początkowy można zawsze przyjąć  $t_0 = 0$ .

---

<sup>3</sup> [3] s. 2

<sup>4</sup> [4] s. 1 - 3

Rozwiązanie powyższego równania zapisuje się często jako  $\phi_t(x_0)$ , aby w sposób jawny pokazać zależność rozwiązania od warunków początkowych. Zależna od jednego parametru  $t$  rodzina odwzorowań  $\phi_t: R^n \rightarrow R^n$ , spełniająca zależności:

$$\begin{aligned}\phi_{t_1+t_2} &= \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} \\ \phi_0(x) &= x\end{aligned}$$

nazywana jest potokiem fazowym.

Zbiór punktów  $\{\phi_t(x_0): -\infty < t < \infty\}$  nazywany jest trajekcją przechodzącą przez punkt  $x_0$ .

Za pomocą autonomicznych układów dynamicznych czasu ciągłego można opisywać układy automatyki, w których zarówno obiekt sterowania, jak i regulator są niezmiennie w czasie, zaś działanie regulatora zależy tylko od stanu obiektu sterowania (wtedy sygnał wyjściowy regulatora staje się po prostu kolejną zmienną stanu układu). Warunki te spełnia wiele układów z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (np. opisywane w tej pracy wahadło odwrócone, ale także np. termostaty – przy założeniu, że wartość zadana w układzie jest stała).

*Nieautonomiczny układ dynamiczny czasu ciągłego  $n$ -tego rzędu* definiowany jest za pomocą równania stanu:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

Ponieważ w przypadku układu nieautonomicznego pole wektorowe zależy od czasu, w ogólnym wypadku nie można przyjmować, że czas

początkowy  $t_0 = 0$  (w przeciwieństwie do układu autonomicznego). Rozwiązanie tego równania zapisuje się więc jako  $\phi_t(x_0, t_0)$ .

Nieautonomiczny układ dynamiczny jest liniowy jeśli pole wektorowe  $f(x, t)$  jest liniowe względem  $x$ .

Jeśli istnieje  $T > 0$  takie, że  $f(x, t) = f(x, t + T)$  dla dowolnych  $x$  oraz  $t$ , to układ jest *okresowy* z okresem  $T$ . Najmniejszy możliwy okres  $T$  nazywany jest *okresem podstawowym*.

Za pomocą nieautonomicznych układów dynamicznych można opisać układy automatyki, w których obiekt regulacji zmienia się w czasie lub sterowanie jest funkcją czasu. Przykładami takich układów są:

- Układy z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, w których sterowanie nie zależy od stanu obiektu regulacji, jak w przypadku sterowania silnikiem krokowym
- Układy, w których wartość zadana zmienia się w czasie, na przykład serwonapęd w obrabiarce sterowanej numerycznie (ze zmieniającą się zadaną prędkością obrotową)

Jeśli sterowanie lub wartość zadana w układzie jest okresową funkcją czasu, a obiekt regulacji nie zmienia się w czasie (lub jeśli zmiany te są okresowe), to układ regulacji można opisać za pomocą okresowego układu dynamicznego. Przykładem takiego układu może być układ ogrzewania lub oświetlenia, w którym wartość zadana zmienia się w cyklu dobowym (jest funkcją okresową o okresie podstawowym  $T = 24h$ ).

Każdy okresowy nieautonomiczny układ dynamiczny  $n$ -tego rzędu o okresie  $T$  może być przedstawiony jako układ autonomiczny rzędu  $(n+1)$  przez dodanie do wektora stanu dodatkowej zmiennej stanu  $\theta = 2\pi t/T$ . Po tak opisanym przekształceniu, układ autonomiczny opisany jest równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \theta T/2\pi), \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T, \quad \theta(t_0) = 2\pi t_0 / T\end{aligned}$$

Ponieważ funkcja  $f$  jest okresowa o okresie  $T$ , powyższy układ równań jest okresowy względem zmiennej  $\theta$  z okresem  $2\pi$ . Stąd, płaszczyzny  $\theta = 0$  oraz  $\theta = 2\pi$  mogą zostać uznane za identyczne, zaś przestrzeń fazowa układu może być przekształcona z przestrzeni euklidesowej  $R^{n+1}$  do przestrzeni cylindrycznej  $R^n \times S^1$ , gdzie zbiór  $S^1 = \langle 0, 2\pi \rangle$  opisuje okrąg.

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(x_0, t_0) \\ 2\pi t/T \text{ mod } 2\pi \end{bmatrix}$$

Funkcja modulo ogranicza wartość zmiennej  $\theta$  do  $0 \leq \theta(t) < 2\pi$ . Dzięki opisanemu przekształceniu, teoria układów autonomicznych może zostać zastosowana do okresowych układów nieautonomicznych.

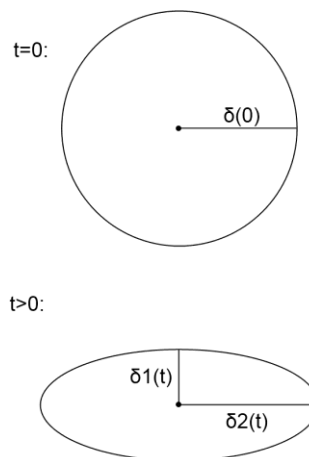
W podobny sposób można przekształcić dowolny układ nieautonomiczny rzędu  $n$  w układ autonomiczny rzędu  $n+1$ , nawet jeśli układ nieautonomiczny nie jest okresowy. W takim wypadku jednak wektor stanu  $x(t)$  staje się nieograniczony.

## Wykładniki Lapunowa<sup>5</sup>

Wykładniki Lapunowa to wskaźniki określające wrażliwość układu na zaburzenia warunków początkowych. Definicja wykładników Lapunowa dla układu dynamicznego n-tego rzędu jest następująca:

Niech wektor  $x(0) = x_0$  stanowi wektor warunków początkowych pewnego układu dynamicznego n-tego rzędu. Rozważmy przekształcenia infinytezymalnej sfery zaburzonych warunków początkowych o środku w punkcie  $x_0$  i promieniu  $\delta$ . Z czasem sfera zostanie przekształcona w infinytezymalną elipsoidę. Niech  $\delta_k(t), k = 1, \dots, n$ , oznacza długość k-tej osi elipsoidy. Wtedy  $\delta_k(t) \approx \delta(0) * e^{\lambda_k t}$ , gdzie  $\lambda_k$  jest k-tym wykładnikiem Lapunowa.

Ilustracja do powyższej definicji (dla  $n = 2$ ) znajduje się poniżej (Rys. 2). Na rysunku można zauważyć, że dla  $t > 0$  mamy  $\delta_1(t) < \delta_1(0)$  oraz  $\delta_2(t) > \delta_2(0)$ . W tym wypadku mamy więc  $\lambda_1 < 0$  oraz  $\lambda_2 > 0$ .



Rys. 2. Ilustracja definicji wykładników Lapunowa

<sup>5</sup> [3] s. 320 - 322

Można wyobrazić sobie, że zaburzenie osiąga największą wartość w kierunku osi elipsoidy odpowiadającej największemu wykładnikowi Lapunowa (LLE), ponieważ stosunek wielkości zaburzenia w tym kierunku do normy z zaburzenia w jakimkolwiek kierunku ortogonalnym rośnie wykładniczo w czasie. Wynika z tego, iż jeśli choć jeden (największy) wykładnik Lapunowa jest dodatni, to zaburzenie warunków początkowych rośnie (co do normy) wykładniczo w czasie. Z drugiej strony, jeśli największy wykładnik Lapunowa (LLE) jest ujemny, to gwarantowany jest wykładniczy spadek wielkości zaburzenia.

Ze względu na fakt, że na zachowanie układu dynamicznego kluczowy wpływ ma największy wykładnik Lapunowa, przyjmijmy następujące uproszczenie:

Niech  $x(t_0)$  stanowi wektor warunków początkowych pewnego układu dynamicznego, zaś  $x(t_0) + \delta x(t_0)$  stanowi zaburzony wektor warunków początkowych, gdzie  $\delta x(t_0)$  jest infinitezymalnym wektorem zaburzenia. Wtedy:

$$\|\delta x(t)\| \approx \|\delta x(t_0)\| * e^{\lambda t}$$

gdzie  $\lambda$  jest największym wykładnikiem Lapunowa (LLE).

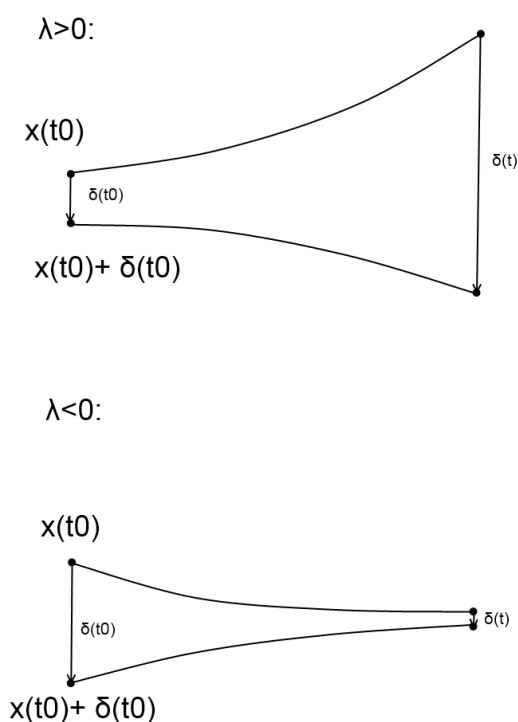
Ze względu na fakt, że zaburzenia w kierunkach ortogonalnych do kierunku LLE maleją wykładniczo względem zaburzenia w kierunku LLE, można przyjąć, że dla odpowiednio dużego czasu  $t$  składowe wektora zaburzenia w kierunkach ortogonalnych do kierunku LLE stają się pomijalnie małe, a więc kierunek wektora zaburzenia zbiega się z kierunkiem odpowiadającym LLE.

Z powyższej zależności wynikają następujące wnioski:

- Dodatnia wartość LLE oznacza, że dowolne zaburzenie w układzie jest wykładniczo wzmacniane w czasie, oznacza to niestabilność układu. Dodatni wykładnik Lapunowa charakteryzuje zachowanie chaotyczne<sup>6</sup>

- Ujemna wartość LLE oznacza, że dowolne zaburzenie w układzie jest wykładniczo tłumione w czasie. Oznacza to stabilność układu.

Zachowanie trajektorii o infinitezymalnie bliskich warunkach początkowych, dla przypadków  $\lambda > 0$  oraz  $\lambda < 0$ , zaprezentowano na Rys. 3.



*Rys. 3. Zachowanie trajektorii o infinitezymalnie bliskich warunkach początkowych w zależności od znaku LLE*

---

<sup>6</sup> [3] s. 367

Ponieważ poniższa praca dotyczy układów automatycznej regulacji, nie będą tutaj zgłębiane (skądinąd niezwykle ciekawe) przypadki, gdy  $LLE > 0$ , a układ staje się niestabilny lub chaotyczny – takie zachowania w układach automatyki są absolutnie niedopuszczalne. W tej pracy uwaga skupiona będzie na tym jak doprowadzić LLE do jak najmniejszej, koniecznie ujemnej, wartości oraz jakie korzyści zapewnia minimalizacja LLE.

Należy zwrócić uwagę, że najczęściej norma zaburzenia nie zmienia się dokładnie zgodnie z funkcją wykładniczą  $e^{\lambda t}$ . LLE nie opisuje precyzyjnie stosunku norm zaburzeń w dowolnych chwilach czasowych, a jedynie trend szybkości zmian. W konsekwencji tego faktu, LLE nie powinien być wyznaczany jedynie na podstawie jednej czy kilku wartości normy zaburzenia – zamiast tego, należy stosować długookresowe obserwacje wartości wykładnika oraz uśrednianie<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> [3] s. 321



## Stan wiedzy

### Metody oceny jakości regulacji

Istnieje wiele metod oceny jakości regulacji na podstawie sygnałów generowanych przez układ regulacji. Przede wszystkim należy wymienić kilka klasyczne wskaźniki jakości regulacji obliczane na podstawie przebiegu sygnału uchybu (są to wskaźniki bezpośrednie)<sup>8</sup>.

Przy założeniu, że sygnał wartości zadanej  $g(t)$  lub sygnał zakłócenia oddziałującego na obiekt mają postać wymuszenia skokowego (a więc wartość 0 dla  $t < 0$  oraz 1 dla  $t > 0$ ), uchyb regulacji można przedstawić jako sumę:

$$e(t) = e_u + e_p(t)$$

gdzie:  $e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  – składowa ustalona uchybu,  $e_p(t)$  – składowa przejściowa uchybu.

Typowe bezpośrednie wskaźniki regulacji wymieniono poniżej:

- a) Wartość ustalona uchybu (uchyb statyczny)

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

- b) Maksymalna wartość uchybu przejściowego

$$e_1 = \max_t |e_p(t)|$$

- c) Przeregulowanie

$$\chi = \left| \frac{e_2}{e_1} \right|$$

gdzie  $e_2$  – maksymalna wartość uchybu o znaku przeciwnym do  $e_1$

---

<sup>8</sup> [2] s. 91-93

d) Czas regulacji z dopuszczalną wartością uchybu  $\Delta e$ :

$$t_r = \max_i \{t_i\}$$

gdzie:  $|e_p(t_i)| = \Delta e$

e) Całka z wartości bezwzględnej uchybu (IAE)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e_p(t)| dt$$

f) Całka uchybu kwadratowego (ISE)

$$ISE = \int_0^{\infty} e_p^2(t) dt$$

g) Całka z iloczynu czasu i wartości bezwzględnej (ITAE)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e_p(t)| dt$$

Oprócz typowych kryteriów, do oceny jakości regulacji szeroko stosowana jest wariancja (lub – równoważnie – odchylenie standardowe). Regulacja z minimalizacją wariancji określana jest jako MV – „minimum variance”<sup>9</sup>. Wskaźnik jakości regulacji oparty na wariancji nazywany jest też indeksem Harrisa, od nazwiska naukowca, który jako pierwszy użył tej metody oceny jakości regulacji<sup>10</sup>

W późniejszych pracach zastosowanie indeksu Harrisa rozszerzono na układy regulacji o wielu wejściach i wielu wyjściach<sup>11</sup>.

Alternatywą dla techniki MV jest zastosowanie regulatora liniowo-kwadratowego Gaussa („linear quadratic Gaussian” – LQG). Ten typ regulacji jest jednym z podstawowych zagadnień z zakresu teorii sterowania optymalnego<sup>12</sup>. W teorii sterowania optymalnego rolę wskaźnika jakości regulacji pełni całka z funkcji kosztu. Funkcja ta zależna jest od wektora stanu oraz wektora sterowania. Dobór

---

<sup>9</sup> [6, 7]

<sup>10</sup> [7]

<sup>11</sup> [8, 9]

<sup>12</sup> [10]

regulatora przeprowadza się tak, aby wartość wskaźnika kosztów była jak najmniejsza<sup>13</sup>.

W przypadku stosowania LQG zakłada się, że układ zakłócony jest szumem białym, zaś funkcją kosztów jest funkcja kwadratowa<sup>14</sup>.

Istnieją także techniki stosowane wtedy, gdy dany jest konkretny układ regulacji, zaś dostosowaniu podlegają jedynie jego parametry. W szczególności interesujące są prace dotyczące oceny jakości regulacji w układach z bardzo popularnymi regulatorami PID<sup>15</sup>. Zbadano na przykład, jaką najmniejszą wartość wariancji można osiągnąć przy zastosowaniu regulatora o strukturze PID<sup>16</sup>.

## Metody estymacji wykładników Lapunowa

Celem poniższej pracy jest sprawdzenie możliwości zastosowania największego wykładnika Lapunowa jako kryterium jakości regulacji. W tej pracy założonym kryterium jakości regulacji jest estymacja największego wykładnika Lapunowa na podstawie iloczynu skalarnego wektora zaburzenia oraz jego pochodnej<sup>17</sup>. Wykładniki Lapunowa są odpowiednim narzędziem do oceny jakości regulacji, gdyż określają one zbieżność lub rozbieżność trajektorii układu dynamicznego rozpoczynających się w bliskich sobie punktach. Istnienie takich liczb zostało udowodnione<sup>18</sup>. Istnieje wiele metod obliczania wykładników Lapunowa, które różnią się obszarami zastosowań oraz szybkością działania.<sup>19</sup>

Obliczanie wszystkich wykładników Lapunowa danego systemu jest kłopotliwe. Co więcej, z punktu widzenia układów sterowania tylko największy wykładnik Lapunowa (LLE - „Largest Lapunov Exponent”)

---

<sup>13</sup> [11]

<sup>14</sup> [11]

<sup>15</sup> [12,13]

<sup>16</sup> [12]

<sup>17</sup> [14]

<sup>18</sup> [15]

<sup>19</sup> [4,16,17,18]

ma znaczenie. Wynika to z faktu, że ujemna wartość największego wykładnika Lapunowa implikuje zbieżność trajektorii fazowych, a więc także stabilność układu. Co więcej, im mniejsza jest wartość LLE, tym szybciej zbliżają się do siebie trajektorie fazowe, a więc tym lepsza jest jakość regulacji. Istnieją metody, które pozwalają na obliczanie wyłącznie największego wykładnika Lapunowa (LLE), działają one znacznie szybciej niż te obliczające również kolejne wykładniki<sup>20</sup>.

W tym rozdziale opisane zostaną dwie typowe metody obliczania największego wykładnika Lapunowa: pierwsza – bezpośrednia, oparta o wyznaczanie wartości własnych iloczynu macierzy Jakobiego, druga – oparta na obserwacji zmian wektora zaburzenia w czasie. W rozdziale 3 (Metodyka badań) przedstawiona zostanie modyfikacja metody opartej na obserwacji wektora zaburzenia w czasie, która znacząco upraszcza obliczenia.

Metody przedstawione w tym rozdziale, ściśle rzecz biorąc, dotyczą układów dyskretnych. Nie jest to jednak błędem użycie ich w badaniach układów ciągłych, gdyż obliczenia numeryczne wymuszają dyskretyzację układu.

## **Metoda bezpośrednia<sup>21</sup>**

Niech ewolucja infinytezymalnego zaburzenia w układzie dynamicznym opisana będzie równaniem:

$$\delta x^{(n)} = \Phi_T(x^{(n-1)}) * \delta x^{(n-1)}, n \in N_+$$

---

<sup>20</sup> [14], [19-25]

<sup>21</sup> [4], s. 73-74

gdzie  $\delta x^{(n-1)}$  – wektor zaburzenia po kroku (n-1),  $\Phi_T(x^{(n-1)})$  – macierz Jakobiego układu w punkcie  $x^{(n-1)}$ , zaś  $\delta x^{(n)}$  jest wektorem zaburzenia w kroku (n) – po czasie T od kroku (n-1). Zmianę zaburzenia od warunków początkowych do kroku (n), czyli od czasu t=0 do czasu t=n\*T, opisuje wtedy macierz:

$$\Phi_{nT}(x^{(0)}) = \prod_{i=0}^{n-1} \Phi_T(x^{(i)})$$

Dla odpowiednio dużej liczby kroków (n) wartość LLE można obliczyć z zależności:

$$\lambda = \frac{1}{kT} * \ln |m(nT)|$$

gdzie  $m(nT)$  – największa wartość własna macierzy  $\Phi_{nT}(x^{(0)})$ . Niestety, macierz ta najczęściej jest źle uwarunkowana, co powoduje problemy obliczeniowe. Intuicja podpowiadałaby więc obliczanie wartości własnych poszczególnych macierzy  $\Phi_T(x^{(i)})$ ,  $0 \leq i < n$ , jednak na podstawie wartości własnych macierzy  $\Phi_T(x^{(i)})$  nie da się wyznaczyć wartości własnych ich iloczynu  $\Phi_{nT}(x^{(0)})$ . Dlatego też w praktyce stosuje się inne metody, przede wszystkim oparte o obserwację ewolucji wektora zaburzenia.

## Metoda oparta o obserwację ewolucji wektora zaburzenia

Metoda ta oparta jest o następującą obserwację: zgodnie z definicją wykładnika Lapunowa (p. 1.7) zaburzenie w kierunku odpowiadającym k-temu wykładnikowi Lapunowa zmienia swoją wartość w przybliżeniu zgodnie z:  $\delta_k(t) \sim \delta(0) * e^{\lambda_k t}$ . Oznacza to, że stosunek wartości zaburzenia w kierunku odpowiadającym największemu wykładnikowi Lapunowa do zaburzenia w jakimkolwiek kierunku ortogonalnym rośnie wykładniczo w czasie. Wynika z tego, że zaburzenie w dowolnym

kierunku, który nie jest ortogonalny do kierunku LLE, zbiega się z czasem z kierunkiem LLE i ewoluuje w przybliżeniu zgodnie z:

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta(t_0)\| * e^{\lambda t}$$

Jeśli więc, podobnie jak w poprzednim podpunkcie, infinitezymalne zaburzenie ewoluuje zgodnie z równaniem:

$$\delta x^{(n)} = \Phi_T(x^{(n-1)}) * \delta x^{(n-1)}, n \in N_+$$

oraz wartość zaburzenia  $\delta x^{(n-1)}$  jest znormalizowana, to wartość największego wykładnika Lapunowa może zostać obliczona zgodnie z:

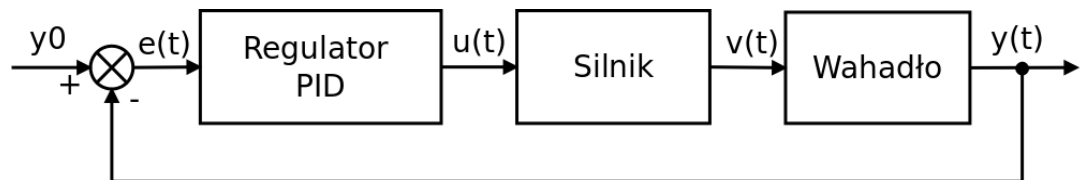
$$\lambda \approx \frac{1}{kT} * \sum_{i=1}^k \ln \|\delta x^{(i)}\|$$

dla odpowiednio dużej wartości (k).

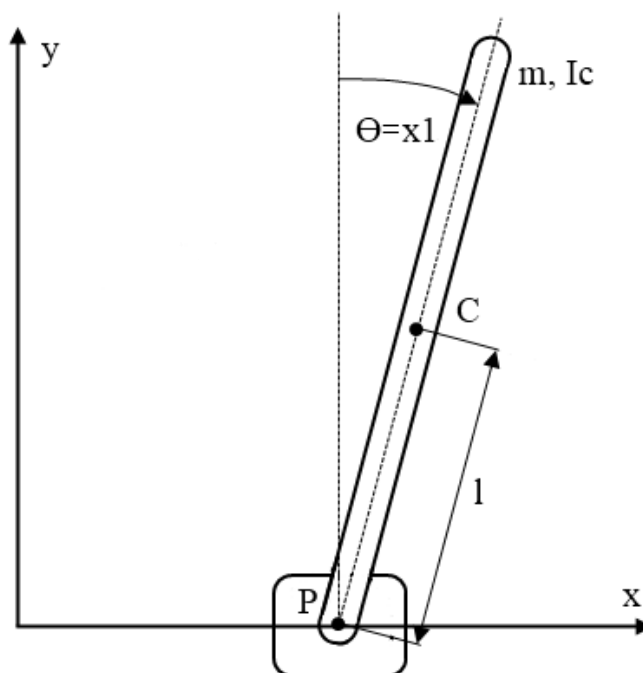
## Metodyka badań

### Modelowanie wahadła odwróconego<sup>22</sup>

W celu sprawdzenia możliwości zastosowania najmniejszego wykładnika Lapunowa jako wskaźnika jakości regulacji w układzie automatycznej regulacji, napisano program w języku C#, który symuluje działanie wahadła odwróconego z regulatorem PID. Schemat symulowanego układu regulacji zaprezentowany jest na Rys. 4, zaś schemat wahadła odwróconego będącego obiektem regulacji zaprezentowany jest na Rys. 5.



Rys. 4. Schemat układu regulacji



Rys. 5. Schemat wahadła odwróconego – obiektu regulacji

<sup>22</sup> [26]

Pręt o masie  $m$ , długości zredukowanej  $l$  i momencie bezwładności względem środka masy  $C$  równym  $I_C$  jest łożyskowany w punkcie  $P$  na ruchomym wózku i ma możliwość swobodnego obrotu względem punktu  $P$ .

Wózek może poruszać się wzdłuż osi  $x$  i jest napędzany silnikiem elektrycznym prądu stałego z magnesem stałym. Zakłada się, że wpływ sił bezwładności od pręta na wózek jest pomijalny. Zadaniem układu jest takie sterowanie prędkością wózka, aby dzięki działaniu sił bezwładności pręt stabilizował się w pozycji pionowej.

Sygnałem wyjściowym obiektu regulacji jest kąt wychylenia pręta wahadła od pionu  $y(t) = \theta(t)$ . Wartość zadana w tym układzie odpowiada pozycji pionowej pręta, a więc wartości  $g(t) = 0$ . Uchyb regulacji jest więc równy  $e(t) = -\theta(t)$ . Uchyb ten stanowi sygnał wejściowy regulatora PID. Regulator PID generuje sygnał napięcia przyłożonego do silnika<sup>23</sup>, który napędza wózek wahadła. Zmiany prędkości wózka powodują oddziaływanie na pręt sił bezwładności.

### Dynamika pręta wahadła

Na pręt wahadła działają trzy momenty sił (względem punktu  $P$ , w którym pręt wahadła jest łożyskowany). Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, równanie ruchu pręta wahadła będzie więc następujące:

$$(I_C + ml^2) * \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl * \sin(\theta) - m \frac{d^2x}{dt^2} l * \cos(\theta) - b * \frac{d\theta}{dt}$$

gdzie  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  – przyspieszenie wózka wahadła,  $b$  – współczynnik tłumienia. Po prostym przekształceniu otrzymuje się:

---

<sup>23</sup> Dla zgodności znaków założono, że ujemne napięcie na silniku powoduje ruch wózka zgodny ze zwrotem osi „ $x$ ”



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{mgl * \sin(\theta) - m \frac{d^2x}{dt^2} l * \cos(\theta) - b * \frac{d\theta}{dt}}{I_C + ml^2}$$

Równanie to po transformacji do przestrzeni stanu przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{mgl * \sin(\theta) - m\ddot{x}l * \cos(\theta) - b * \dot{\theta}}{I_C + ml^2} \end{bmatrix}$$

### Model silnika

Silnik napędzający wahadło jest elementem astatycznym. Element taki, zapisany w postaci operatorowej, można przedstawić za pomocą następującego modelu zastępczego<sup>24</sup>:

$$G_s(s) = \frac{k_s * e^{-sT_0}}{s}$$

Transmitancja ta stanowi iloraz:

$$G_s(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

gdzie  $X(s)$  to transformata Laplace'a sygnału wyjściowego silnika (odpowiadającemu współrzędnej poziomej punktu P wózka  $x(t)$ ), zaś  $U(s)$  to transformata Laplace'a sygnału wejściowego silnika (napięcia przyłożonego na silnik). Przy zerowych warunkach początkowych pozycja wózka jest więc splotem odwrotnej transformaty Laplace'a transmitancji silnika oraz sygnału napięcia podanego na silnik:

$$x(t) = g_s(t) * u(t) = \int_0^t g_s(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

gdzie  $g_s(t)$  – odwrotna transformata Laplace'a transmitancji silnika,  $u(t)$  – sygnał napięcia przyłożonego na silnik.

---

<sup>24</sup> [2], s. 108

W przypadku analizowanego obiektu regulacji, zgodnie z równaniem ruchu wahadła, nie jest jednak istotna wartość  $x(t)$ . Wystarczająca jest znajomość pochodnych tego sygnału. Korzystając z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym i tablicy transformat Laplace'a<sup>25</sup> można znaleźć funkcję  $g_s(t)$ :

$$g_s(t) = L^{-1}\{G_s(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_s}{s} * e^{-sT_0}\right\} = k_s * 1(t - T_0)$$

Prędkość wózka  $\dot{x}(t)$  można obliczyć różniczkując zależność  $x(t)$ . Korzystając z odwrotnej transformaty Laplace'a transmitancji silnika  $g_s(t)$  otrzymuje się:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g_s(\tau) u(t - \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t k_s * 1(\tau - T_0) u(t - \tau) d\tau$$

Z definicji funkcji jednostkowej<sup>26</sup> wynika, że  $1(\tau - T_0) = 0$  dla  $\tau < T_0$ , można więc zmienić granice całkowania:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k_s * 1(\tau - T_0) u(t - \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{T_0}^t k_s * u(t - \tau) d\tau$$

Stosując podstawienie:  $w = t - \tau$ ,  $dw = -d\tau$  otrzymuje się:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t-T_0}^0 k_s * u(w) * (-dw) = k_s \frac{d}{dt} \int_0^{t-T_0} u(w) dw$$

Na koniec, z definicji funkcji pochodnej, przy  $dt \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k_s * \frac{d}{dt} \int_0^{t-T_0} u(w) dw = k_s * \frac{\int_0^{t+dt-T_0} u(w) dw - \int_0^{t-T_0} u(w) dw}{dt} \\ &= k_s * \frac{\int_{t-T_0}^{t+dt-T_0} u(w) dw}{dt} = k_s * \frac{u(t - T_0) * dt}{dt} \\ &= k_s * u(t - T_0) \end{aligned}$$

<sup>25</sup> [2] s. 25-26

<sup>26</sup> [2] s. 28

Oznacza to, że w dowolnej chwili czasowej  $t$ , prędkość silnika opisanego założoną transmitancją jest iloczynem jego wzmocnienia  $k_s$  oraz wartością sygnału napięcia na jego wejściu w chwili  $t - T_0$ .

Podczas implementacji programu założono, że prędkość i przyspieszenie wózka są ograniczone, zaś położenie wózka  $x(t)$  nie jest ograniczone.

## Regulator

W symulowanym układzie zastosowano regulator PID, opisany w punkcie 1.4, podpunkt d). Celem symulacji było dostrojenie parametrów  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  (są one stałymi w czasie parametrami układu). Od prawidłowego doboru tych współczynników (nastaw regulatora) zależy prawidłowe działanie układu oraz jakość regulacji.

Wzór opisujący regulator PID (p. 1.4):

$$u(t) = k_p * \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] + u(0)$$

nie jest praktyczny w symulacji układu. Po pierwsze, wzór ten opisuje regulator ciągły, podczas gdy w symulacji numerycznej wszystkie sygnały stają się sygnałami dyskretnymi. Po drugie, w tym wzorze nie wzięto pod uwagę ograniczeń wartości sygnału wyjściowego regulatora, które występują w każdym fizycznym układzie regulacji, ze względu na skończoną moc urządzeń.

Aby regulator PID mógł być użyty w dyskretnych układach regulacji należy przeprowadzić dyskretyzację powyższego wzoru, a następnie uwzględnić w modelu regulatora układ anty-windup, który uniemożliwi wzrost obliczonej wartości sygnału wyjściowego powyżej fizycznych możliwości regulatora<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup> [2], s. 148-150

Zastępując sygnały ciągłe sygnały dyskretnymi dla chwil  $t = kT$  otrzymuje się:

$$u(t)|_{t=kT} = u(k)$$

$$e(t)|_{t=kT} = e(k)$$

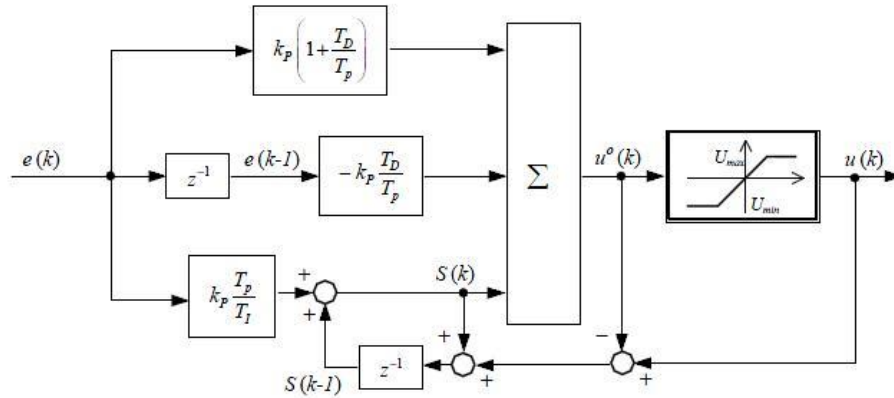
$$\int_0^t e(\tau) d\tau \Big|_{t=kT} \approx \sum_{i=0}^k e(i) * T$$

$$\frac{de(t)}{dt} \Big|_{t=kT} \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

Podstawiając powyższe zależności do równania regulatora PID otrzymuje się:

$$u(k) = k_p * \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right] + u(0)$$

Dyskretny regulator PID może działać w strukturze szeregowej lub równoległej. W przypadku struktury równoległej człon sumujący działa niezależnie od członów proporcjonalnego i różniczkowego, zaś w przypadku struktury szeregowej działanie wszystkich członów regulatora ma miejsce w tym samym torze sygnałowym. W opisanym symulacji wykorzystana została struktura szeregową. Schemat regulatora PID o strukturze szeregowej przedstawiono na rys. 6. Na rysunku zapis  $z^{-1}$  oznacza opóźnienie sygnału o jeden krok (zapisane za pomocą transformaty Z).



Rys. 6. Schemat dyskretnego regulatora PID o strukturze szeregowej

Do opisu struktury szeregowej regulatora PID stosuje się podstawienie:

$$S(k-1) = k_p \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k-1} e(i)$$

Wtedy:

$$S(k) = S(k-1) + k_p \frac{T}{T_i} e(k)$$

Równanie regulatora sprowadza się więc do:

$$u(k) = k_p * \left[ e(k) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right] + S(k)$$

Aby regulator działał poprawnie, należy uwzględnić w jego strukturze układ anty-windup, który ograniczy wartość obliczonego sygnału wyjściowego regulatora do poziomu, który jest fizycznie możliwy do osiągnięcia przez dany regulator. Nadmierny wzrost obliczonego sygnału wyjściowego może być spowodowany przede wszystkim przez zbyt dużą wartość członu sumującego  $S(k)$ . Algorytm regulatora działania regulatora z układem anty-windup jest następujący<sup>28</sup>:

$$1) S(k) \leftarrow S(k-1) + k_p \frac{T}{T_i} e(k)$$

<sup>28</sup> [2], s. 149

$$x \leftarrow \left[ e(k) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right]$$

$$u(k) \leftarrow x + S(k)$$

2) Jeśli  $u(k) > U_{max}$ , to  $S(k) \leftarrow U_{max} - x, u(k) \leftarrow U_{max}$

3) Jeśli  $u(k) < U_{min}$ , to  $S(k) \leftarrow U_{min} - x, u(k) \leftarrow U_{min}$

4)  $e(k-1) \leftarrow e(k), S(k-1) \leftarrow S(k)$

5) Odczyt bieżącej wartości uchybu  $e(k)$ , powrót do kroku 1

## Uproszczona metoda estymacji największego wykładnika Lapunowa<sup>29</sup>

W poniższej pracy do obliczania wartości największego wykładnika Lapunowa użyto metody opartej na obserwacji ewolucji infinitesimalnego wektora zaburzenia. Wykładnik oblicza się na podstawie iloczynu skalarnego zaburzenia i jego pochodnej. Jest to metoda opracowana stosunkowo niedawno, jej zaletami są przede wszystkim prostota i szybkość obliczeń. Działanie metody opisane jest poniżej.

Zakłada się, że układ dynamiczny opisany jest równaniem:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

(jak w p. 1.6). Podstawą metody jest analiza ewolucji wektora zaburzenia. Niech wektor zaburzenia będzie zdefiniowany jako różnica między dwiema początkowo bliskimi trajektoriami:

$$\delta x(t) = \phi_t(x_0 + \delta x(0)) - \phi_t(x_0)$$

Należy ponadto założyć, że zaburzenie początkowe  $\delta x(0)$  jest infinitesimalnie małe.

---

<sup>29</sup> [14]

Ewolucję zaburzenia można przedstawić w przybliżeniu za pomocą macierzy Jakobiego (podobnie jak dla metody opisanej w punkcie 2.4):

$$\delta x(t + dt) = \Phi_{dt}(x(t)) * \delta x(t)$$

gdzie  $\Phi_{dt}(x(t))$  to macierz Jakobiego dla wektora stanu  $x(t)$ ; pozwala ona na obliczenie jak zmieni się zaburzenie wokół punktu  $x(t)$  w czasie od  $t$  do  $t + dt$ .

Niech  $\delta x^*(t)$  będzie rzutem zaburzenia na kierunek odpowiadający największej wartości własnej macierzy  $\Phi_{dt}(x(t))$ , która oznaczona będzie jako  $m(t)$ . Zgodnie z definicją wartości własnych i odpowiadającym ich kierunków (opisanych przez wektory własne) ewolucja tego wektora przebiega według równania:

$$\frac{d(\delta x^*(t))}{dt} = m(t) * \delta x^*(t)$$

Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\frac{\frac{d(\delta x^*(t))}{dt}}{\delta x^*(t)} = m(t)$$

Mnożąc licznik i mianownik lewej strony równania (skalarnie) przez  $\delta x^*(t)$  otrzymuje się:

$$\frac{\frac{d(\delta x^*(t))}{dt} \cdot \delta x^*(t)}{\|\delta x^*(t)\|^2} = m(t)$$

Ponieważ z czasem wpływ mniejszych wartości własnej maleje,  $m(t)$  zbliża się do wartości LLE. Uśredniona po czasie wartość  $m(t)$  jest więc aproksymacją największego wykładnika Lapunowa w układzie:

$$\lambda \approx \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \frac{d(\delta x^*(\tau))}{d\tau} \cdot \frac{\delta x^*(\tau)}{\|\delta x^*(\tau)\|^2} d\tau$$

Dla układu dyskretnego, wzór ten przyjmuje postać:

$$\lambda \approx \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^n \frac{(\delta x^{(n)} - \delta x^{(n-1)}) \cdot \delta x^{(n)}}{\|\delta x^{(n)}\|^2}$$

Obliczanie największego wykładnika Lapunowa zgodnie z powyższym wzorem jest znacznie mniej kosztowne obliczeniowo, niż obliczenia za pomocą wzoru przedstawionego w punkcie 2.4, gdyż unika się obliczania logarytmu.

### **Całkowanie numeryczne układów równań różniczkowych<sup>30</sup>**

W większości przypadków rozwiązania nieliniowych układów równań różniczkowych (np. układów dynamicznych) nie mogą być wyznaczone w sposób analityczny. Aby poznać przybliżone rozwiązanie, należy użyć odpowiednich metod numerycznych.

Całkowanie numeryczne zawsze daje rezultat przybliżony, obarczony błędem. Błąd ten ma dwa źródła: błąd metody i błąd zaokrąglenia. Błąd metody wynika z zasady działania wybranego algorytmu. Jest on najczęściej proporcjonalny do  $(\Delta t)^r$ , gdzie  $\Delta t$  – długość kroku całkowania,  $r$  – rząd metody. Dla małych wartości kroku całkowania wydawałoby się, że korzystnie jest wybrać jak największy rząd metody. Metody wyższych rzędów są jednak bardziej skomplikowane, wymagają większej ilości obliczeń, a przez to większy jest dla nich błąd zaokrąglenia. Podobna zasada występuje przy doborze kroku

---

<sup>30</sup> [3], s. 32-34, 145-147



całkowania: zbyt duży krok całkowania powoduje wzrost błędu metody, zbyt mały – wzrost błędu zaokrąglenia.

Dobór kroku całkowania zależy przede wszystkim od właściwości analizowanego układu. W przypadku doboru rzędu metody, dobrym kompromisem pomiędzy błędem metody a błędem zaokrąglenia wydaje się zastosowanie metody Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4).

Jeśli układ dynamiczny dany jest równaniem:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

a także dany jest początkowy stan układu  $x^{(n)}$ , to stan tego układu  $x^{(n+1)}$  po czasie  $\Delta t$  można przybliżyć metodą RK4 za pomocą następujących wzorów:

$$k_1 = f(x^{(n)}) * \Delta t$$

$$k_2 = f\left(x^{(n)} + \frac{1}{2} * k_1\right) * \Delta t$$

$$k_3 = f\left(x^{(n)} + \frac{1}{2} * k_2\right) * \Delta t$$

$$k_4 = f(x^{(n)} + k_3) * \Delta t$$

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{6} * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$$

Powyższe wzory podane są w postaci dla układów autonomicznych. Nie jest to jednak ograniczenie, ponieważ zgodnie z p. 1.6 każdy układ nieautonomiczny n-tego rzędu można przedstawić jako układ autonomiczny rzędu n+1.

## Wyniki badań

### Program do symulacji układu regulacji

Jak już wspomniano, układ regulacji jest symulowany przez aplikację napisaną w języku C#. Podstawą jej działania jest całkowanie za pomocą metody RK4 układu równań różniczkowych opisujących ruch wahadła (równania te wyprowadzono w p. 3.2). Po każdym kroku całkowania, na podstawie obliczonych wartości kąta  $\theta$ , obliczany jest sygnał wyjściowy regulatora zgodnie ze wzorem z p. 3.4. Na podstawie sygnału wyjściowego regulatora, zgodnie ze wzorem obliczana jest prędkość wózka oraz przyspieszenie wózka. Nowe przyspieszenie wózka jest przekazywane do następnego kroku procedury całkującej układ. Na podstawie sygnału wyjściowego obiektu regulacji (tzn. na podstawie przebiegu sygnału kąta  $\theta(t)$ ) obliczane są wartości przeregulowania, IAE, ISE oraz ITAE (definicje tych wskaźników jakości można znaleźć w p. 2.1. W każdym kroku całkowania obliczany jest także parametr  $m(t)$  (p. 3.5). Jego wartość średnia jest obliczana co pełen okres drgań wahadła. Gdy wartość średnia stabilizuje się, przyjmuje się ją jako przybliżenie największego wykładnika Lapunowa.

### Eksperyment

Eksperyment polegał na symulacji działania układu dla różnych nastaw regulatora PID, tzn. dla różnych wartości parametrów  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ . Dla każdego zestawu nastaw, na podstawie przebiegu sygnału kąta  $\theta(t)$ , obliczane były wartości różnych wskaźników jakości regulacji: przeregulowania oraz wskaźników całkowych: IAE, ISE, ITAE. Obliczano także wartość największego wykładnika Lapunowa. Porównano, czy poszczególne kryteria są ze sobą zgodne, tzn. czy dla nastaw dających mniejszą wartość największego wykładnika Lapunowa otrzymujemy także mniejsze przeregulowanie i mniejsze wskaźniki całkowe. Porównano także przebiegi dla nastaw, które są najlepsze

zgodnie z typowymi kryteriami (przeregulowanie, IAE, ISE, ITAE) z przebiegami dla nastaw, dla których największy wykładnik Lapunowa osiąga najmniejszą wartość.

### **Parametry układu, parametry procedury całkującej, warunki początkowe**

W doborze parametrów układu wzorowano się na istniejącym, przygotowywanym stanowisku z wahadłem odwrotnym.

Do obliczeń dynamiki pręta wahadła przyjęto następujące wartości:

$$m = 0,1kg; g = 9,81 \frac{m}{s^2}; l = 0,115m; b = 0,0001N * m * s; I_C = \frac{1}{12} * 0,1kg * (0,25m)^2 \approx 5,2 * 10^{-4}kg * m^2$$

Do symulacji silnika przyjęto wartości:

$$k_s = 0,3 \frac{m/s}{V}; T_0 = 0,04s$$

Przyjęto także ograniczenia napięcia na silniku (równego napięciu wyjściowemu regulatora), prędkości wózka oraz przyspieszenia wózka:

$$|u(t)| \leq 12V; \left| \frac{dx}{dt} \right| \leq 4 \frac{m}{s}; \left| \frac{d^2x}{dt^2} \right| \leq 20 \frac{m}{s^2}$$

Założono, że układ rozpoczyna pracę przy warunkach początkowych:

$$x_1(0) = \theta(0) = 1^\circ = \frac{\pi}{180} rad; x_2(0) = \dot{\theta}(0) = \frac{1^\circ}{s} = \frac{\pi}{180} \frac{rad}{s}$$

Krok całkowania w procedurze RK4 wynosił  $10^{-5}$ . Założono ponadto, że wartość wykładnika Lapunowa jest ustabilizowana gdy przez 10 kolejnych okresów drgań pręta wahadła wartość bezwzględna różnicy wartości przybliżenia LLE nie przekracza 0,0001.

Parametry regulatora do symulacji dobrano tak, aby obserwować przede wszystkim zachowanie układu stabilnego bądź na granicy

stabilności. Symulację przeprowadzono dla wszystkich możliwych kombinacji podanych poniżej wartości parametrów  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ :

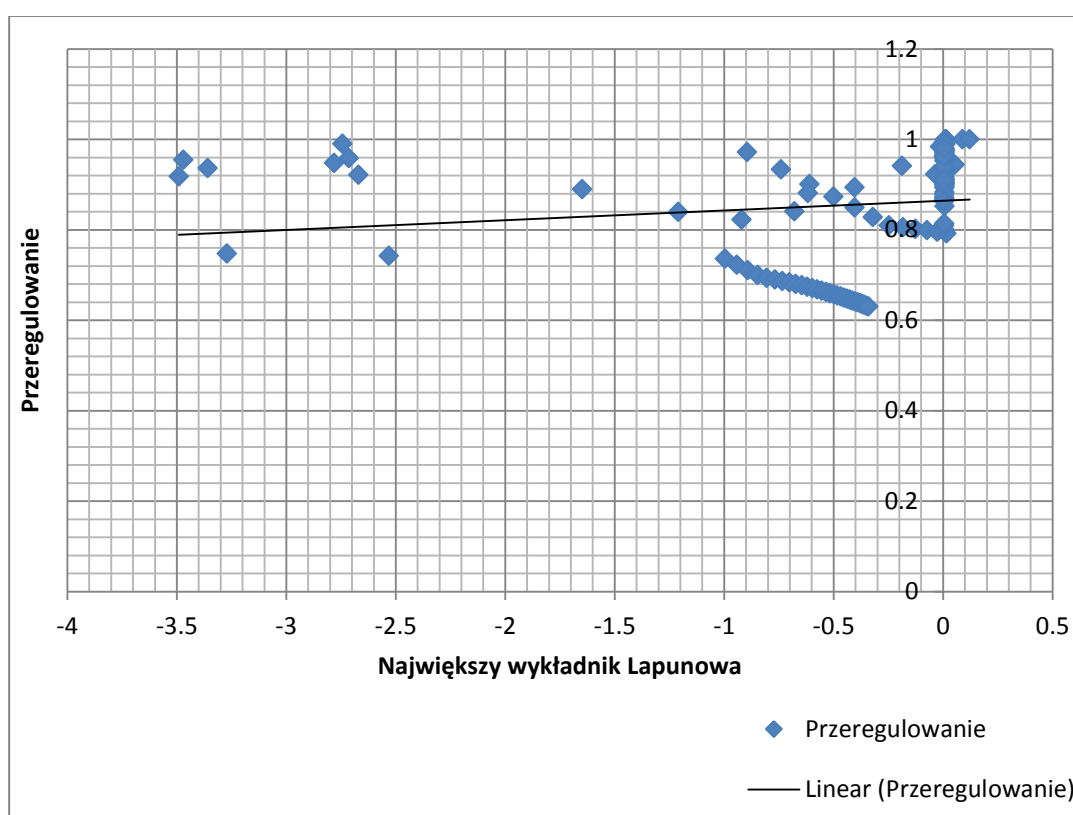
$$k_p \in \{36,37,38\}$$

$$T_I \in \{0,05; 0,06; 0,07; \dots; 0,50\}$$

$$T_D \in \{0; 0,01; 0,02; \dots; 0,20\}$$

## Wyniki

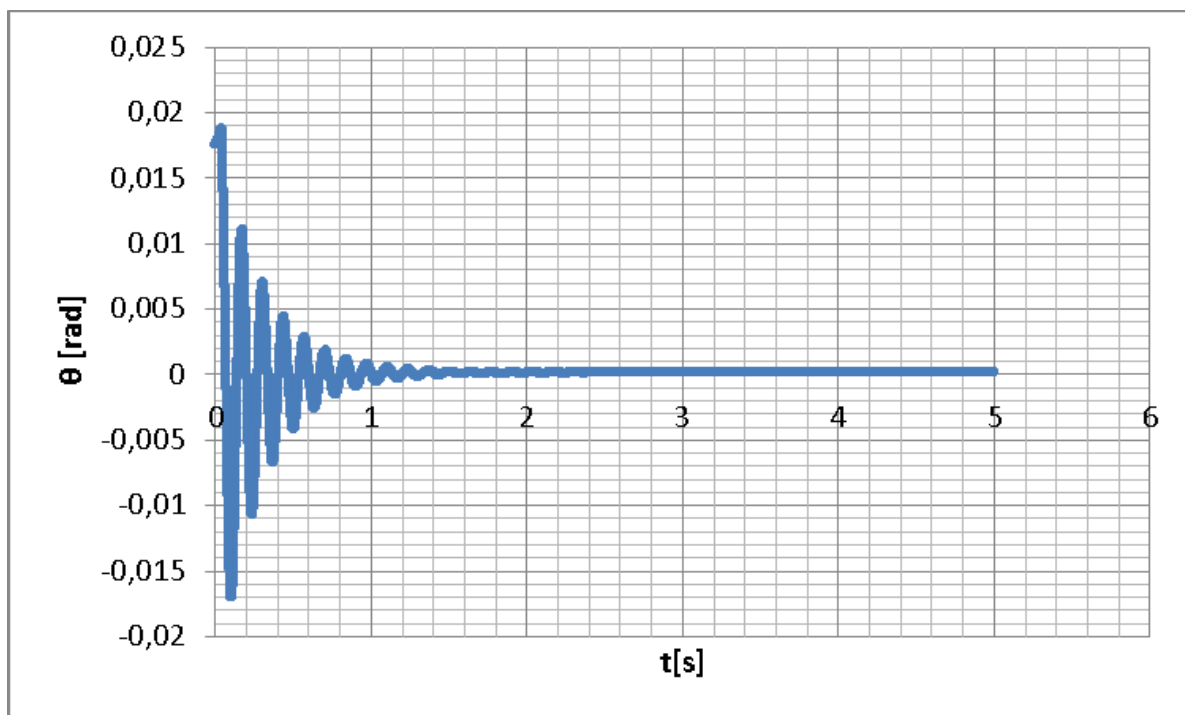
### a) Największy wykładnik Lapunowa a przeregulowanie



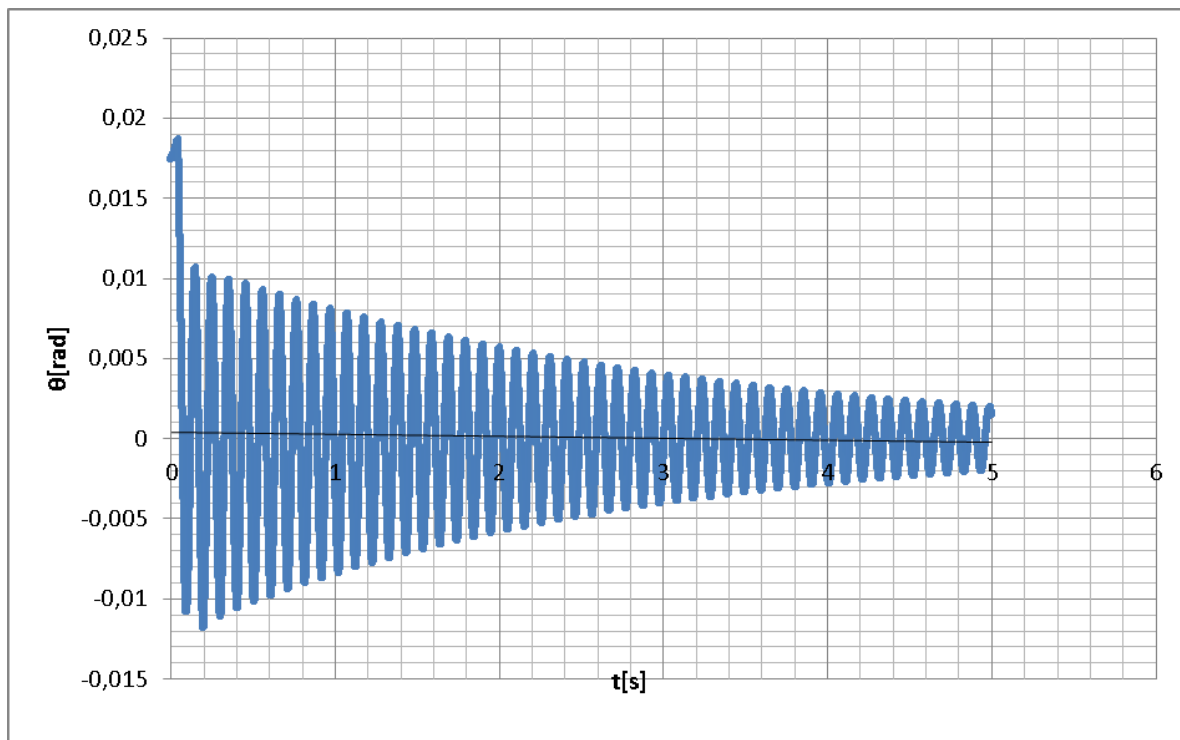
Rys. 7. Wykres zależności przeregulowania od największego wykładnika Lapunowa dla wszystkich kombinacji parametrów  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$

Powyższy wykres wskazuje, że nie istnieje prosta zależność między wartością przeregulowania a wartością największego wykładnika Lapunowa (choć linia trendu wskazuje, że statystycznie wraz ze wzrostem wartości największego wykładnika Lapunowa rośnie także przeregulowanie). Pozostaje pytanie, który

wskaźnik jakości regulacji jest bardziej miarodajny, przeregulowanie czy największy wykładnik Lapunowa ? W tym celu przeanalizowano przebiegi dla parametrów regulatora dających najmniejsze przeregulowanie oraz dla parametrów regulatora dających najmniejszą wartość największego wykładnika Lapunowa.



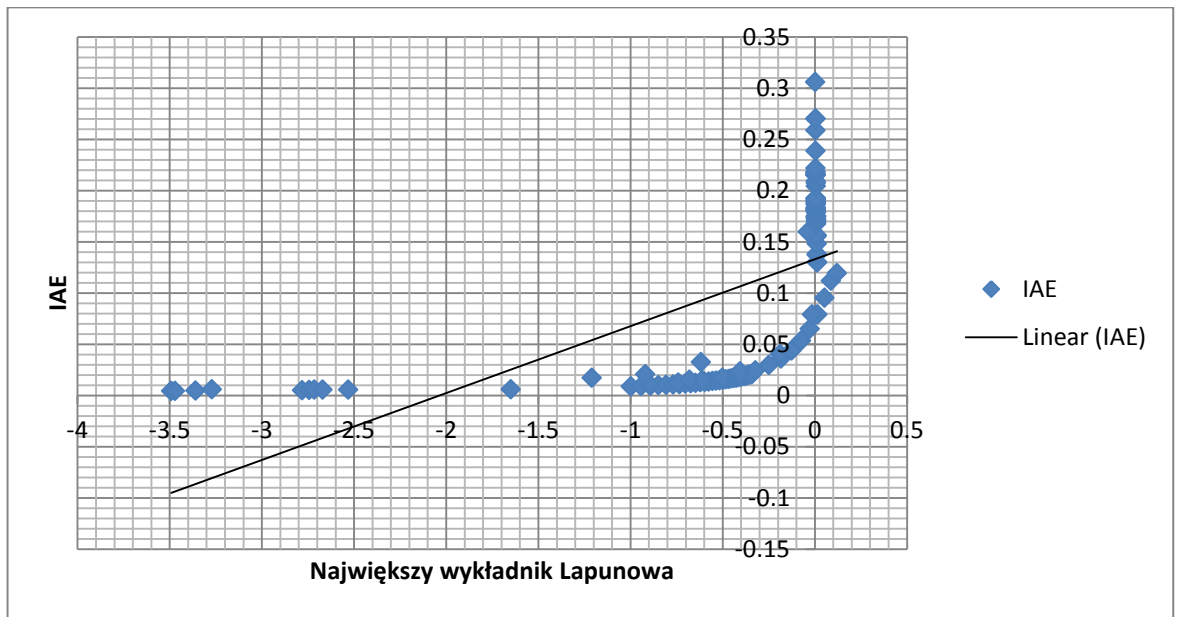
*Rys. 8. Przebieg sygnału wyjściowego obiektu regulacji dla nastaw  $k_p = 37$ ;  $T_I = 0,26$ ;  $T_D = 0,01$ , dla których wartość największego wykładnika Lapunowa jest najmniejsza (-3,491) przy przeregulowaniu 0,918. Przebieg ten charakteryzuje się także najniższymi wartościami wskaźników całkowych ( $IAE=0,004$ ;  $ISE=4,13E-05$ ;  $ITAE=0,001$ )*



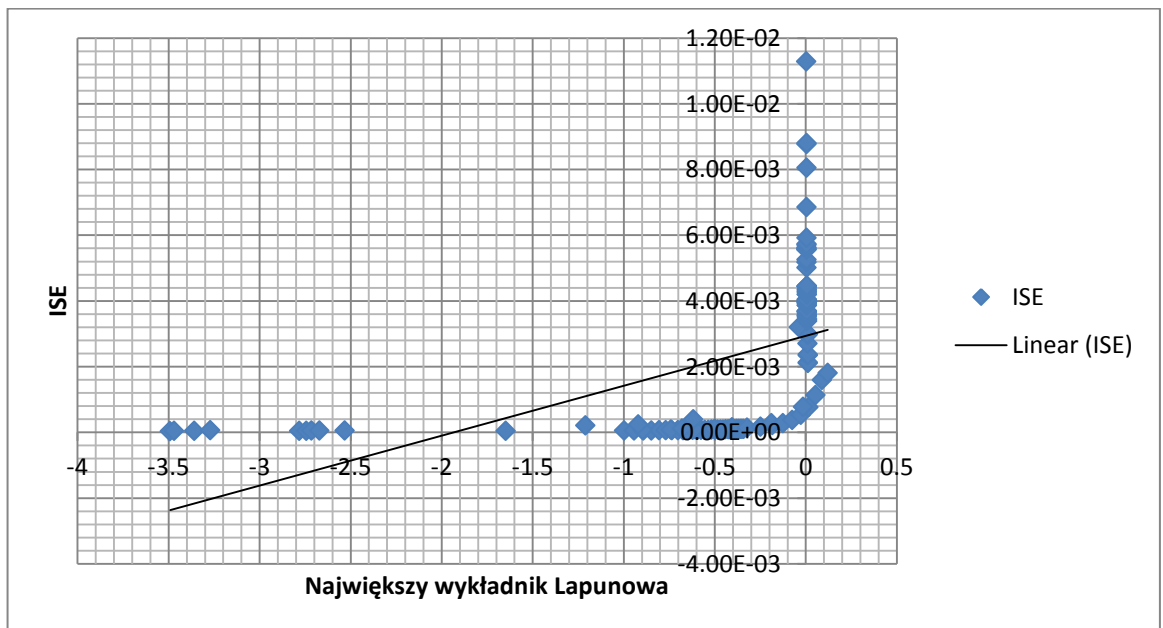
*Rys. 9. Przebieg sygnału wyjściowego obiektu regulacji dla nastaw  $k_p = 36$ ;  $T_I = 0,49$ ;  $T_D = 0,02$ , dla których wartość przeregulowania jest najmniejsza (0,630) przy przy wartości największego wykładnika Lapunowa -0,341*

Porównując wykresy na rys. 8 i rys. 9 można zauważyć, że przy doborze nastaw regulatora według minimalnej wartości największego wykładnika Lapunowa, już po około 2,5 s od rozpoczęcia symulacji układ powrócił do stanu równowagi. Z kolei przy doborze nastaw regulatora według najmniejszej wartości przeregulowania po 5 sekundach układ nadal nie powrócił do stanu równowagi, trwając w bardzo wolno gasnących drganiach. Wynika to z faktu, że przeregulowanie liczy się tylko na podstawie pierwszych dwóch ekstremów sygnału wyjściowego obiektu regulacji.

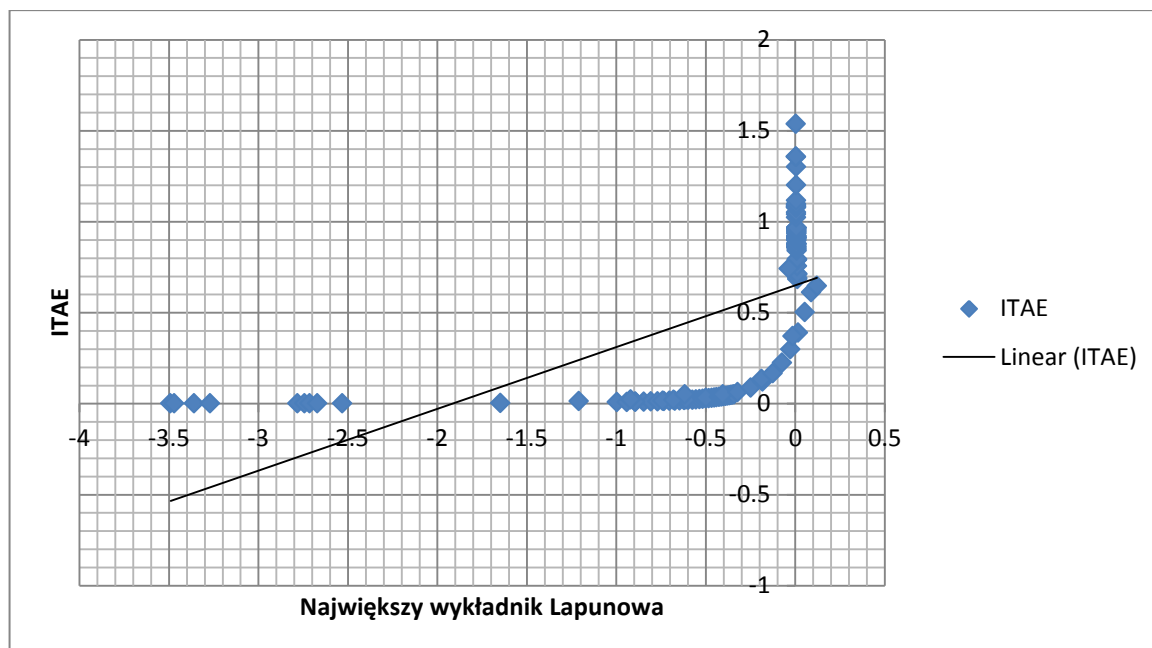
b) Największy wykładnik Lapunowa a kryteria całkowite (IAE, ISE, ITAE)



Rys. 10. Wykres zależności IAE od największego wykładnika Lapunowa dla wszystkich kombinacji parametrów  $k_p, T_I, T_D$



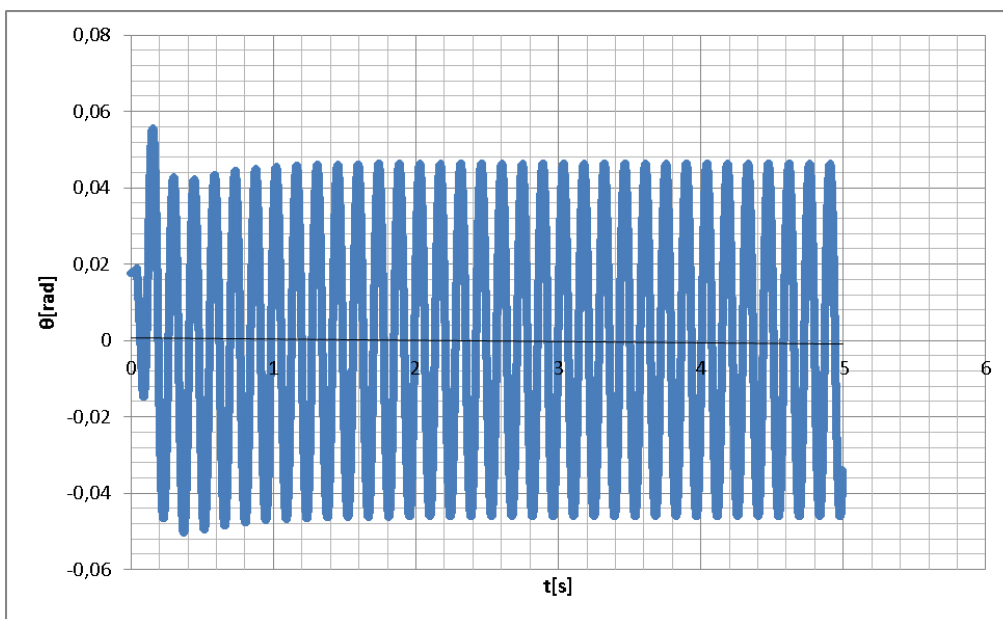
Rys. 11. Wykres zależności ISE od największego wykładnika Lapunowa dla wszystkich kombinacji parametrów  $k_p, T_I, T_D$



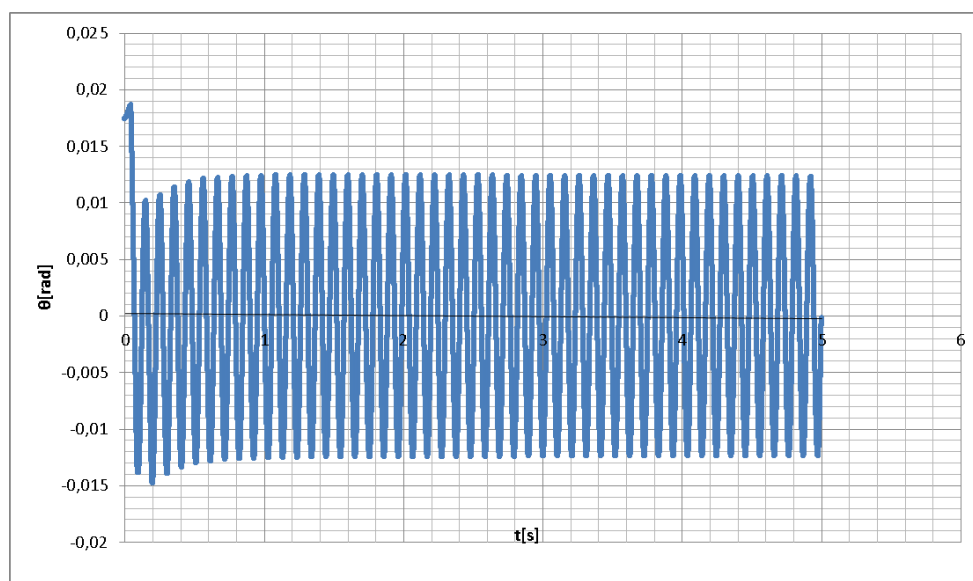
Rys. 12. Wykres zależności ITAE od największego wykładnika Lapunowa dla wszystkich kombinacji parametrów  $k_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$

Obserwując wykresy 10, 11 i 12 można zauważyć, że całkowite wskaźniki jakości regulacji są generalnie zgodne z kryterium opartym na najmniejszej wartości największego wykładnika Lapunowa, gdyż wraz ze wzrostem wartości wykładnika rosną też wartości wskaźników całkowych. Co więcej, według wszystkich trzech kryteriów całkowych, optymalne nastawy regulatora odpowiadają nastawom wyznaczonym za pomocą kryterium najmniejszej wartości największego wykładnika Lapunowa (Rys. 8). Należy jednak zwrócić uwagę na charakterystyczną właściwość powyższych wykresów. Dla wszystkich kryteriów całkowych, na dużym przedziale wartości największego wykładnika Lapunowa (od około -3,5 do około -0,5) wartość kryteriów całkowych zmienia się bardzo powoli, natomiast dla wartości największego wykładnika Lapunowa bliskiej 0 obserwujemy wiele różnych wartości kryteriów całkowych. Aby wyjaśnić powód tego zjawiska, należy przeanalizować kilka przebiegów.



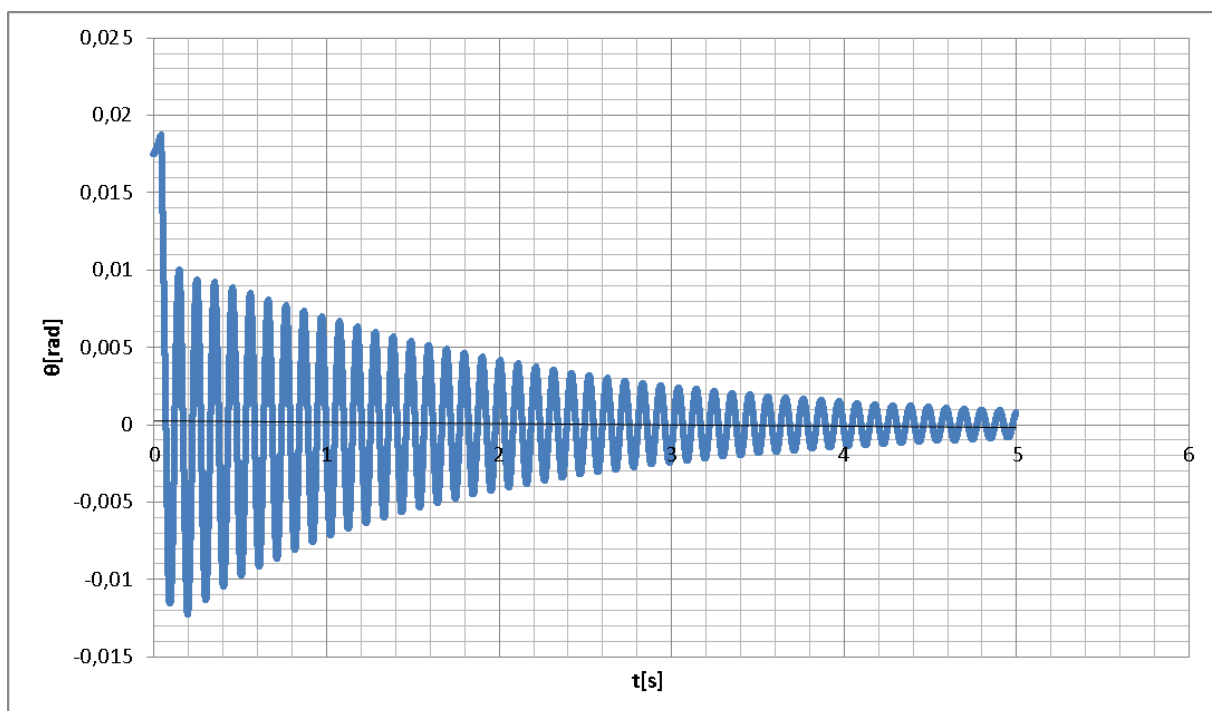


Rys. 13. Przebieg sygnału wyjściowego obiektu regulacji dla nastaw  $k_p = 37$ ;  $T_I = 0,36$ ;  $T_D = 0,07$ , dla których wartość wszystkich wskaźników całkowych jest największa ( $IAE=0,306$ ;  $ISE = 0,011$ ;  $ITAE= 1,537$ ) przy wartości największego wykładnika Lapunowa  $0,003$



Rys. 14. Przebieg sygnału wyjściowego obiektu regulacji dla nastaw  $k_p = 37$ ;  $T_I = 0,23$ ;  $T_D = 0,02$ , dla których wartość wskaźników całkowych wynosi  $IAE = 0,079$ ,  $ISE= 0,001$ ,  $ITAE=0,390$  przy wartości największego wykładnika Lapunowa  $0,015$

Na podstawie rys. 13 i rys. 14 można zaobserwować dwa przebiegi sygnału wyjściowego układu na granicy stabilności. Dla przebiegu z rys. 13 wskaźniki całkowe osiągają kilkukrotnie wyższe wartości niż dla przebiegu z rys. 14, tylko dlatego, że drgania niegasnące mają na tym przebiegu wyższą amplitudę, niż na przebiegu z rys. 14. Z drugiej strony, wartość największego wykładnika Lapunowa dla obu przebiegów pozostaje bliska zeru.



*Rys. 15. Przebieg sygnału wyjściowego obiektu regulacji dla nastaw  $k_p = 36$ ;  $T_I = 0,35$ ;  $T_D = 0,02$ , dla których wartość wskaźników całkowych wynosi  $IAE = 0,014$ ;  $ISE=8,17E-05$ ;  $ITAE=0,026$  przy wartości największego wykładnika Lapunowa  $-0,516$*

Porównując rys. 8 z rys. 15 można zaobserwować, że dla dwóch przebiegów różniących się znacznie jakością regulacji (w pierwszym wypadku czas regulacji to mniej niż 2,5 s, w drugim ponad 5 s) różnice wartości wskaźników całkowych są niewielkie. Z drugiej strony, różnica wartości największego wykładnika Lapunowa jest znaczna ( $-3,491$  dla rys. 7 i  $-0,516$  dla rys. 14).

## Wnioski

### a) Największy wykładnik Lapunowa a przeregulowanie

Na podstawie wykresu z Rys. 6 można stwierdzić, że ocena jakości regulacji za pomocą pomiaru przeregulowania może dawać w ogólnym przypadku inne rezultaty, niż ocena jakości regulacji za pomocą największego wykładnika Lapunowa. Porównując wykresy 7 i 8 można dojść do wniosku, że ocena jakości regulacji za pomocą największego wykładnika Lapunowa jest bardziej przydatna, gdyż największy wykładnik Lapunowa opisuje szybkość wygaszania drgań na szerokim przedziale czasu, a nie tylko dla pierwszych dwóch ekstremów sygnału wyjściowego obiektu regulacji. Jest to szczególnie istotne w przypadku obiektów silnie oscylacyjnych, takich jak wahadło odwrotne.

Należy jednak pamiętać, że przeregulowanie jest o wiele prostszym wskaźnikiem regulacji niż największy wykładnik Lapunowa. W przypadku, gdy nie dysponujemy modelem obiektu regulacji, a jedynie rzeczywistym układem, sprawdzanie przeregulowania jest z całą pewnością mniej kłopotliwe.

### b) Największy wykładnik Lapunowa a kryteria całkowite

Zgodnie z wykresami z rys. 9, 10 i 11 ocena jakości regulacji za pomocą największego wykładnika Lapunowa jest w dużej mierze zbieżna z oceną jakości regulacji za pomocą wskaźników całkowych. Jednak analizując przebiegi z rys. 12, 13, 7 i 14 można przekonać się, że kryteria całkowite posiadają istotne wady, które nie występują przy ocenie jakości regulacji za pomocą największego wykładnika Lapunowa. Kryteria całkowite, mierząc pola pod wykresami sygnałów, zmieniają się przede wszystkim ze względu na amplitudę sygnału, podczas gdy wartość największego wykładnika Lapunowa spada wraz z szybkością zanikania drgań. Ponieważ to szybkość wygaszania drgań, a więc likwidacji uchybu, jest najważniejszą cechą dobrego układu regulacji, można sądzić, że największy wykładnik Lapunowa jest lepszym kryterium oceny jakości regulacji, niż wskaźniki całkowite.

Warto wspomnieć, że obliczanie największego wykładnika Lapunowa metodą użytą w tej pracy nie jest dużo bardziej kosztowne obliczeniowo niż obliczanie kryteriów całkowych. Wymaga jednak, aby analizowany układ był obserwowalny.

Najważniejszym wnioskiem z poniższej pracy wydaje się fakt, że narzędzi dynamiki nieliniowej można z powodzeniem stosować do układów automatycznej regulacji. Jest to tym istotniejsze, że większość rzeczywistych obiektów regulacji jest nieliniowa, przez co standardową, liniową teorię sterowania stosować można jedynie w przybliżeniu.

## Bibliografia

- [1] Pełczewski W., 1980, „Teoria sterowania”, WNT, Warszawa
- [2] Dębowski A., 2008, „Automatyka podstawy teorii”, WNT, Warszawa
- [3] Strogatz S. H., 1994, „Nonlinear Dynamics and Chaos”, Reading, Massachusetts
- [4] Parker T.S., Chua L. O., 1989, Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems, Springer-Verlag, New York
- [5] I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, G. Musiol, H. Mühlig, 2007, „Nowoczesne kompendium matematyki”, PWN, Warszawa
- [6] Jelali M. „An overview of control performance assessment technology and industrial applications”, Control Engineering Practice, Volume 14, Issue 5, May 2006, Pages 441–466
- [7] Harris T. „Assessment of closed loop performance”, Canadian Journal of Chemical Engineering, Volume 67 (1989), Pages 856–861.
- [8] Harris, T., Boudreau, F., & MacGregor, J. F. „Performance assessment using of multivariable feedback controllers”, Automatica, Volume 32 (1996), Pages 1505–1518.
- [9] Huang, B., Shah, S. L., & Kwok, E. K. „Good, bad or optimal? Performance assessment of multivariable processes”, Automatica, Volume 33 (1997), Pages 1175–1183.
- [10] Huang, B., & Shah, S. L. „Performance assessment of control loops. Berlin: Springer.
- [11] Takahashi Y., Rabins M. J., Auslander D. M. „Sterowanie i systemy dynamiczne”, Warszawa: WNT; 1976

- [12] Ko, B. -S., & Edgar, T. F. „Assessment of achievable PI control performance for linear processes with dead time” American control conference 1998, Philadelphia, USA.
- [13] Ko, B.-S., & Edgar, T. F. „PID control performance assessment: The single-loop case”, AIChE Journal, Volume 50 (2004), Pages 1211–1218.
- [14] Dąbrowski A., Stefański A. „Estimation of the largest Lyapunov exponent from the perturbation vector and its derivative dot product”, Nonlinear Dynamics 2012; Volume 67: Pages 283-291
- [15] Oseledec VI. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans Moscow Math Soc 1968;19:197–231.
- [16] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn JM. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems; a method for computing all of them, part I: theory. Meccanica 1980;15:9–20.
- [17] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn JM. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems; a method for computing all of them, part II: numerical application. Meccanica 1980;15:21–30.
- [18] Wolf A. Quantifying chaos with Lyapunov exponents. In: Holden V, editor. Chaos. Manchester: Manchester University Press; 1986. p. 273–90.
- [19] Rosenstein MT, Collins JJ, De Luca CJ. „A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets”, Physica D (1993); Volume 65(1,2), Pages 117–34.
- [20] Kantz H. „A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series”, Phys Lett A (1994); Volume 185, Pages 77–87.
- [21] Kim BJ, Choe GH. „High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent” Commun Nonlinear Sci Numer Simulat (2010); Volume 15, Pages 1378–1384.

- [22] Stefański, A.. „Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts”, *Chaos Solitons Fractals* 2000; 11 (15): 2443–2451.
- [23] Stefański, A., Kapitaniak, T. „Estimation of the dominant Lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization”. *Chaos Solitons Fractals* 2003; 15:233–244.
- [24] Stefański, A., Dąbrowski, A., Kapitaniak, T. „Evaluation of the largest Lyapunov exponent in dynamical systems with time delay”, *Chaos, Solitons and Fractals* 2005;23:1651-1659.
- [25] Stefanski, A.. „Lyapunov exponents of the systems with noise and fluctuating parameters”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 2008;46(3):665-678.
- [26] Balcerzak M., Dąbrowski A., Kapitaniak T., Optimization of the control system parameters with use of the new simple method of the Largest Lyapunov Exponent calculations.”, *Mechanics and Mechanical Engineering* 2013, Volume 17 Issue 4